УДК 517.938

**Макаров Д.В.1,2, Паровик Р.И.3**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН КОНДРАТЬЕВА С УЧЕТОМ ЭРЕДИТАРНОСТИ**

1Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга

2Камчатский технический университет

3Институт космофизических исследований и распространение радиоволн ДВО РАН

*E-mail: Danil.Makarov.PK@yandex.ru*

*E-mail: Pomanparovik@gmail.com*

*Аннотация. В статье предложена новая математическая модель экономических циклов и кризисов, которая обобщает известную модель Дубовского С.В. Новизна предложенной модели, заключается в учете эффекта эредитарности (наследственности или памяти), а также введения гармонических функций, отвечающих за приход инвестиций в основные фонды и новых управленческих технологий в инновации. Математическое описание дается с помощью дробных производных Герасимова-Капуто, которые изучаются в рамках теории дробного исчисления. Математическая модель была исследована с помощью численного метода Адамса-Башфорта-Моултона (АБМ), построены фазовые траектории. Показано, что предложенная математическая модель может обладать как регулярными, так и хаотическими режимами.*

*Ключевые слова: Модель Дубовского С.В., теория дробного исчисления, метод Адамса-Башфорта-Моултона (АБМ), эффект эредитарности, фазовые траектории, регулярные и хаотические режимы.*

**Makarov D.V.1,2, Parovik R.I.3**

**NUMERICAL MODELING OF LONG WAVE KONDRATIEFF GIVEN HEREDITARILY**

1Vitus Bering Kamchatka state University

2Kamchatka technical University

3Institute for cosmophysical research and radio wave propagation FEB RAS

*E-mail: Danil.Makarov.PK@yandex.ru*

*E-mail: Pomanparovik@gmail.com*

*Abstract. The article proposes a new mathematical model of economic cycles and crises, which generalizes the well-known model of Dubovsky S.V. The novelty of the proposed model lies in taking into account the effect of heredity (heredity or memory), as well as the introduction of harmonic functions responsible for the arrival of investments in fixed assets and new management technologies in innovation. The mathematical description is given using the Gerasimov-Caputo fractional derivatives, which are studied within the framework of the theory of fractional calculus. The mathematical model was investigated using the numerical method of Adams-Bashfort-Moulton (ABM), phase trajectories were constructed. It is shown that the proposed mathematical model can have both regular and chaotic regimes.*

*Keywords:* *Dubovskiy S.V. model, fractional calculus theory, Adams-Bashfort-Moulton (ABM) method, heredity effect, phase trajectories, regular and chaotic modes.*

**Введение.** В работе [15] был проведен обзор литературы, около 260 источников, посвященный приложению дробного исчисления в экономике. Там же были рассмотрены работы различных авторов, которые использовали дробное исчисление для описания дифференциальных моделей экономики с учетом наследственности или памяти. Эффекты памяти в экономической системе проявляются таким образом, что текущее ее состояния зависит от предыдущих состояний или предыстории. Такие эффекты могут быть учтены при исследовании экономических кризисов и циклов, которые возникают при определенных условиях в зависимости от предыстории. Не исключением являются длинные волны Кондратьева [1]. Они хорошо описывают инновационные системы, которые характеризуют взрывной технологический рост (прорыв) экономики при внедрении инноваций, стадию замедления и выхода инновации из экономики [4].

Существуют несколько математических моделей циклов Кондратьева, наиболее распространенные среди них – модель Дубовского В.С. [6] и модель Акаева А.А. [2]. Мы остановимся на модели Дубовского В.С., обобщение которой на случай эредитарности было дано авторами в работе [5].

Настоящая работа является продолжением работы [5]. В модельное уравнение была введена функция, характеризующая приток новых управленческих решений в инновации, а также был использован более точный численный метод анализа предложенной модели.

Некоторые сведение из теории дробного исчисления.Здесь мы рассмотрим основные определения из теории дробного исчисления, более детально его аспекты можно изучить в книгах [10-12].

**Определение 1.** Дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка ****:

 (1)

и имеет следующие свойства:

**Определение 2.** Дробная производная Герасимова-Капуто порядка  имеет вид:

 (2)

Оператор (2) имеет следующие свойства [7]:

.

**Постановка задачи.**

**,** (3)

где - эффективность инноваций, отношение производительности труда на новых рабочих местах к средней производительности на всех рабочих местах всех возрастов;  - эффективность основных фондов (средств) организации;  - норма накопления, валовое накопление в долях ВВП;  - параметр, определяющий размер и длительность циклов;  - положительные константы, определяющие начальные условия;  - текущее время, рассматриваемого процесса;  - время моделирования;  - координата точки равновесия системы (1);  - заданные положительные константы; дробные операторы в системе (1) определяются из (2):

, . (4)

Система (3) описывает длинные волны Кондратьева с учетом эредитарности. В случае, когда в системе (3)  и  мы получаем модель Дубовского, которая была предложена и исследована С.В. Дубовским в работе [6]. Поэтому динамическую систему (3) будем называть обобщенной моделью Дубовского (ОМД).

**Методика исследования. Метод Адамса-Башфорта-Моултона.** Метод АБМ относится к типу численных методов предиктор-корректор для решения дифференциальных уравнений. Он подробно изучен и обсужден в работах [7,9,16].

Будем считать, что искомые функции  обладают необходимой гладкостью. На равномерной сетке с шагом  введем сеточные функции , , которые будут определяться по формуле Адамса-Башфорта (предиктор) с учетом свойств операторов (1) и (2):

 (5)

Тогда по формуле Адамса-Моултона для корректора, мы получим:

 (6)

где весовые коэффициенты в (6) определяются по формуле:



Для метода АБМ справедлива теорема.

**Теорема.** Если , тогда

. (7)

Доказательство теоремы основывается на методе математической индукции, и оно приведено в работе [16].

Отметим, что в случае  с учетом (7), мы получаем классический метод АБМ второго порядка точности.

**Результаты исследования.** Исследуем, как ведет себя вычислительная точность методов. Для этого мы будем использовать метод двойного пересчета (правило Рунге) для оценки ошибки по формуле:

, (8)

где  - порядок точности метода АБМ,  - погрешности на шаге ,  - численные решения на шаге . Вычислительную точность  определим из формул:

, , (9)

 - шаги сетки, а  на шаге .

**Пример 1. (Классическая модель Дубовского).**

Рассмотрим тестовый пример в случае . Значения параметров для задачи Коши (1) выберем следующими: . Результаты численного анализа приведены в табл.1.

Таблица 1. Классическая модель Дубовского 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 10 | 1/10 | 0.0397415350 | 0.0799740787 | - | - |
| 20 | 1/20 | 0.0060318953 | 0.0187709253 | 2.72 | 2.09 |
| 40 | 1/40 | 0.0010575820 | 0.0045870660 | 2.51 | 2.03 |
| 80 | 1/80 | 0.0002336673 | 0.0011345727 | 2.18 | 2.02 |
| 160 | 1/160 | 0.0000552493 | 0.0002821520 | 2.08 | 2.01 |
| 320 | 1/320 | 0.000013453 | 0.0000703530 | 2.04 | 2.00 |

Из табл. 1 видно, что с увеличением расчетных узлов сетки, вычислительные точности  стремятся к  - порядку точности метода АБМ. Рассмотрим другой пример, реализующий ОМД.

**Пример 2. (Обобщенная модель Дубовского)**

Рассмотрим случай , остальные параметры возьмем из предыдущего примера. Результаты моделирования приведены в табл.2.

Таблица 2. Обобщенная модель Дубовского 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 10 | 1/10 | 0.1171054420 | 0.2158809510 | - | - |
| 20 | 1/20 | 0.0235086005 | 0.0586392164 | 2.3165475629 | 1.8802982187 |
| 40 | 1/40 | 0.0041498810 | 0.0173332737 | 2.5020467762 | 1.7583216658 |
| 80 | 1/80 | 0.0009959756 | 0.0051032771 | 2.0588875967 | 1.7640482636 |
| 160 | 1/160 | 0.0002742665 | 0.0014889669 | 1.8605318928 | 1.7771123047 |
| 320 | 1/320 | 0.0000779949 | 0.0004308895 | 1.8141277492 | 1.7889216854 |

Из табл. 2 видим, что вычислительная точность стремиться к порядку точности метода АБМ, который имеет значение .

Обобщенная математическая модель Дубовского (3) имеет как регулярные, так и хаотические режимы. Покажем это, используя численный алгоритм метода АБМ и построим фазовые траектории при различных значениях параметров задачи.

На рис. 1 приведены регулярные режимы обобщенной математической модели Дубовского на рис. 1a приведены фазовые траектории, построенные в зависимости от различных значений  и начальных условий , которые были взяты из работы [6], т.е. приведена классическая модель Дубовского .

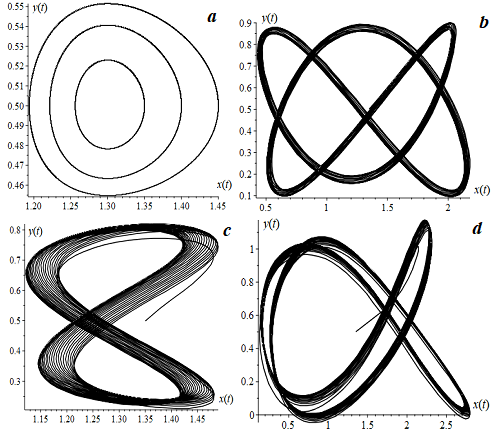
****

Рис. 1 Регулярные режимы

Видно, что фазовые траектории на рис. 1a хорошо согласуется с результатами работы [6], что говорит о корректности расчетов по методу АБМ. На рис. 1b,c,d приведены фазовые траектории, полученные при различных значениях . Мы видим, что фазовые траектории являются предельными циклами, но более сложной формы, чем в классическом случае и похожи на фигуры Лиссажу, которые используются в электронике.

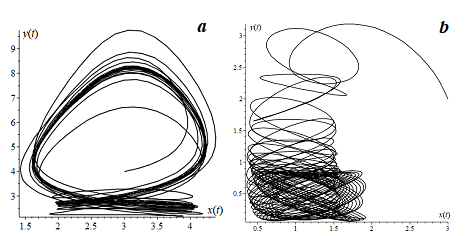
****

Рис. 2. Хаотические режимы

На рис. 2 приведены фазовые траектории, которые характеризуют хаотические режимы, рис.2a зарождение хаотического аттрактора, рис. 2b – хаотический аттрактор. Подобные режимы необходимо исследовать более детально, например, по аналогии с работами [3,8,13-14]. Такое исследование позволит учитывать необходимые значения параметров модели для существования предельных циклов.

**Заключение.** В настоящей работе мы предложили обобщенную модель Дубовского с учетом эффектов наследственности, а также функций, отвечающие за инвестиции и управленческие технологии. Рассмотрели метод АБМ, исследовали точность метода, построили фазовые траектории. Показали, что решения могут описывать как регулярные режимы, так и хаотические режимы. Интерес представляет дальнейшее исследование модели по следующим направлениям: исследование хаотических режимов, например, с помощью спектров максимальных показателей Ляпунова, исследование предельных циклов, определение их длин, например, с помощью сечений Пуанкаре, экономическая интерпретация результатов исследований.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Alexander M.A. The Kondratiev cycle: A generational interpretation. – IUniverse, 2002.
2. Akayev A.A. Analysis of solutions of general equations of microeconomic dynamics // Ekonomika i matematicheskie metody, 2008. Vol. 44, no. 3. pp. 62–78
3. Cao Y. Chaotic synchronization based on fractional order calculus financial system. Chaos, Solitons & Fractals. Vol. 130 (2020): 109410. [Электронный ресурс] – URL: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.109410> (дата обращения 20.06.2020)
4. Makarov D.V. Economic and mathematical modeling innovation systems Vestnik KRAUNTs. Fiz.-mat. nauki. 2014. no. 1(8). pp. 66-70. DOI: 10.18454/2079-6641-2014-8-1-66-70.
5. Makarov D.V., Parovik R.I. Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus, Journal of Internet Banking and Commerce, vol. 21, S21, S6, 2016.
6. Dubovsky S.V. The Kondratiev cycle as an object of modelling, Matem. Mod., 7:6 (1995), 65–74.
7. Diethelm, Kai, Neville J. Ford, and Alan D. Freed. «A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations». Nonlinear Dynamics 29.1-4 (2002): 3-22. DOI:10.1023/A:1016592219341
8. Diouf, M., Sene, N. (2020). Analysis of the Financial Chaotic Model with the Fractional Derivative Operator. Complexity, 2020. [Электронный ресурс] – URL: <https://doi.org/10.1155/2020/9845031> (дата обращения 25.07.2020)
9. Garrappa, R. (2018). Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial. Mathematics, 2018. 6(2), DOI:10.3390/math6020016
10. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
11. Miller K. S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: A Wiley-Interscience publication, 1993. 384 p.
12. Oldham K.B., Spanier J. The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. London: Academic Press, 1974. 240 p.
13. Parovik R.I. Numerical analysis some oscillation equations with fractional order derivatives. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2014. vol. 9. no. 2. pp. 34-38. DOI: 10.18454/2313-0156-2014-9-2-34-38
14. Parovik R.I. Research of the stability of some hereditary dynamic systems. Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1141. 012079. DOI: 10.1088/1742-6596/1141/1/012079
15. Tarasov V.E. «On history of mathematical economics: Application of fractional calculus». Mathematics.7. 6. 2019. [Электронный ресурс] – URL: <https://doi.org/10.3390/math7060509> (дата обращения 10.08.2020)
16. Yang, C., and F. Liu. «A computationally effective predictor-corrector method for simulating fractional order dynamical control system». ANZIAM Journal 47 (2005): 168-184. DOI:10.21914/anziamj.v47i0.1037

**Благодарность:**

**Работа выполнена в рамках темы НИР КамГУ имени Витуса Беринга «Математическая модель длинных волн Кондратьева с учетом наследственности» №АААА-А20-120021190003-1.**